UYGULAMALAR

1. S örnek uzayında A ve B bağımsız olaylar, B ve C ayrık olaylar, A ve C bağımsız olaylar olsun. Olaylarla ilgili olarak; $p(A \cup B \cup C) = 0{,}9$, $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}3$ ise $P(A) = ?$

<u>Çözüm:</u> A, B ve C gibi üç olayın birleşimi,

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}9 = p(A) + 0{,}5 + 0{,}3 - p(A).(0{,}5) - p(A).(0{,}3) - 0 + 0$$

$$\Rightarrow 0{,}1 = p(A).(1 - 0{,}5 - 0{,}3)$$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2}$$ bulunur.

---

3. Bir ayakkabı mağazasında bir günde sat-
lan ayakkabı sayısı X t.d. ile göster-
sin ve olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot x , & x = 1, 2, \ldots, 10 \\ \frac{1}{100} \cdot (20 - x) , & x = 11, 12, \ldots, 20 \end{cases}$$

olarak veriliyor.

a.) Günde 5 ayakkabı satılma olasılığını

b.) 8'den az ayakkabı " "

c.) 15'den fazla " " "

d.) $p(8 \leq X \leq 13)$ olasılığını bulunuz.

<u>Çözüm</u>: X : Bir günde satılan ayakkabı sayısı olsun. $f(x)$ yukarıda verildiği gibidir.

a.) $p(X=5) = f(x=5) = \frac{1}{100} \cdot 5 = \frac{1}{20}$ //

b.) $p(X<8) = \sum_{x=1}^{7} f(x) = \sum_{x=1}^{7} \frac{1}{100} \cdot x$

$= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7)$

$= \frac{1}{100} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$

$= \frac{1}{\cancel{100}_{25}} \cdot \frac{7 \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}} = \frac{7}{25}$ //

c.) $p(X>15) = \sum_{x=16}^{20} f(x) = \sum_{x=16}^{20} \frac{1}{100} \cdot (20 - x)$

$= \frac{1}{100} \cdot (4 + 3 + 2 + 1) = \frac{1}{100} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2}$

$= \frac{1}{10}$ //

d.) $p(8 \leq X \leq 13) = \sum_{x=8}^{13} f(x)$

$$= \sum_{x=8}^{10} \frac{1}{100} \cdot x + \sum_{x=11}^{13} \frac{1}{100} \cdot (20-x)$$

$$= \frac{1}{100} \cdot (8+9+10) + \frac{1}{100} \cdot (9+8+7)$$

$$= \frac{27}{100} + \frac{24}{100} = \frac{51}{100} \text{ olur.}$$

4.) $p(E) = \frac{1}{3}$, $p(F/E) = \frac{1}{2}$, $p(E/F) = \frac{1}{3}$ olduğuna göre aşağıdaki eşitliklerin sağlanıp-sağlanmadığını inceleyiniz.

a.) E ve F bağımsız olaylardır.

b.) $E \cap F = \emptyset$

c.) $p(E'/F') = \frac{2}{3}$ olduğunu gösteriniz!

Çözüm a.) iki olayın bağımsız olması için

$p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F)$ olmalı.

$p(F/E) = \frac{p(E \cap F)}{p(E)}$ eşitliği kullanılırsa

$\Rightarrow p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F/E)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ // bulunur.

Diğer taraftan,

$p(E/F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1/6}{p(F)} \Rightarrow p(F) = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$ // olur.

O halde; $p(E \cap F) = \frac{1}{6} = p(E) \cdot p(F)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ old. dan

E ve F bağımsızdırlar.

b.) $E \cap F \stackrel{?}{=} \emptyset$

(a)'da gösterildiği gibi $p(E \cap F) = \frac{1}{6}$ olduğundan, $E \cap F = \emptyset$ olamaz.

c.) $P(E'/F') = \dfrac{P(E'\cap F')}{P(F')} = \dfrac{P(E\cup F)'}{1-P(F)} = \dfrac{1-P(E\cup F)}{1-P(F)}$ olur.

(Bilinmeyenlerden bilinene doğru ifade edilir.)

Diğer taraftan,

$$P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \;//$$

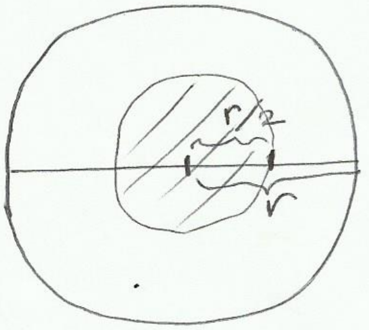
Böylece,

$$P(E'/F') = \frac{1-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2}{3} \;//$$

ifade doğrudur.

5. r yarıçaplı bir çemberin içinde rasgele bir nokta işaretleniyor. Bu noktanın çemberin merkezine uzaklığının, çevresine olan uzaklığından daha küçük olması olasılığı nedir.

Çözüm: r yarıçaplı çember içinde seçilen nokta için uygun bölge aynı merkezli $r/2$ yarıçaplı çemberin iç kısmı olmalıdır.



Geometrik olasılığa göre $r/2$ yarıçaplı çemberin içinin alanının r yarıçaplı çemberin alanına oranı alınmalıdır. O halde,

$$p = \frac{r/2 \text{ yarıçaplı çem. alanı}}{r \text{ yarıçaplı çem. alanı}}$$
$$= \frac{\pi\cdot(r/2)^2}{\pi\cdot r^2} = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

1. X t.d. si $1, 2, \ldots, n$ değerlerini almakta ve c bir sabit olduğuna göre o.f. si

$$f(x) = \{ c.x ,$$

şeklinde veriliyor. $c = \frac{2}{n.(n+1)}$ o'ld. gösteriniz

Çözüm: X için olasılık tablosu

$X=x$	1	2	.	.	.	n
$f(x)=p(X=x)$	c	$2.c$	.	.	.	$n.c$

olur.

Böylece o.f. için $\sum_{X=1}^{n} p(X=x_i) = 1$? olmalı. $\Rightarrow c + 2c + \ldots + n.c = 1$

$\Rightarrow c.(1 + \ldots + n) = c.\frac{n.(n+1)}{2} = 1$

$\Rightarrow c = \frac{2}{n.(n+1)}$ olur.

2. X t.d. için olasılık fonksiyonu veriliyor.

$X=x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x_i)$	0	c	$2c$	$2c$	$3c$	c^2	$2c^2$	$7c^2+c$

i.) c sabitini bulunuz.

ii) $p(X \leq k) > \frac{1}{2}$ ise k'nın min. değerini bul.

Çözüm: i.) o.f. için $\sum f(x_i) = 1$ dir.

$\Rightarrow 0 + c + 2c + 2c + 3c + c^2 + 2c^2 + 7c^2 + c$

$\Rightarrow 10.c^2 + 9.c = 1 \Rightarrow c_1 = -1$ — olasılık olmaz.

$c_2 = \frac{1}{10}$

Böylece, $c = \frac{1}{10}$ bulunur.

ii.) $c = \frac{1}{10}$ yazılırsa,

$X=x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{7}{100}+\frac{1}{10}$

olur.

$k = 1, 2, \ldots$ değerleri için

$p(X \le k) > \frac{1}{2}$ eşitsizliği incelenirse

$F(1) = p(X \le 1) = f(0) + f(1) = 0 + \frac{1}{10} \not> \frac{1}{2}$

$k=2$

$F(2) = p(X \le 2) = f(0) + f(1) + f(2)$

$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10} \not> \frac{1}{2}$

$k=3$

$F(3) = p(X \le 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$

$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} \not> \frac{1}{2}$

$k=4$

$F(4) = p(X \le 4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$

$= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} > \frac{1}{2}$

eşitsizliği sağlayan olduğundan Min. değer olarak $k = 4$ alınır.

3. Düzgün iki zarın atılması deneyinde, X t.d. elde edilen sayıların toplamı olmak üzere bu toplamın en az 4 ve en çok 8 olma olasılığı nedir?

Çözüm: İki zar deneyi için $6^2 = 36$ mümkün sonuç vardır

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	.	.	.	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	.	.	.	(2,6)
3	⋮					
4	⋮					
5						(6,6)
6	(6,1)	.				

X için olasılık ve dağılım fonksiyonu tabloda verilmiştir. X: üste gelen ~~zarlar~~ sayıların toplamı

$X=x$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x)=p(X\le x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

1

$S_3 = (1,2),\ (2,1)$

$S_4 = (2,2),(3,1),(1,3)$

$$p(4 \le X \le 8) = F(8) - F(3)$$

$$= \frac{26}{36} - \frac{3}{36} = \frac{23}{36}$$ elde edilir.

4. X t.d. için o.y.f.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}75.(1-x^2) &, -1 \le x \le 1 \\ 0 &, \text{d.h.} \end{cases}$$

olsun.

i.) $F(x) = ?$

ii.) $p(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}) = ?$

iii.) $p(\frac{1}{4} \le X \le 2) = ?$

iv.) $p(X \le x) = 0{,}95$ için $x = ?$

Çözüm: i.) $-1 \le x \le 1$ aralığında D.F.

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-1}^{x} 0{,}75.(1-x^2).dx$$

$$= 0{,}75.(x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-1}^{x} = 0{,}75[(x - 0{,}25.x^3) - (-1 + \frac{1}{3})]$$

$$= 0{,}5 + 0{,}75.x - 0{,}25.x^3$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 &, x < -1 \\ 0{,}5 + 0{,}75x - 0{,}25x^3 &, -1 \le x \le 1 \\ 1 &, x > 1 \end{cases}$$

ii.) $p(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2})$

$$= 0{,}68$$

iii.) $p(\frac{1}{4} \le X \le 2) = F(2) - F(\frac{1}{4}) = 0{,}31$

iv.) $p(X \le x) = F(x) = 0{,}5 + 0{,}75x - 0{,}25x^3 = 0{,}95$

$\Rightarrow 4/\ 0{,}75.x - 0{,}25.x^3 = 0{,}45$

$\Rightarrow 3x - x^3 = 1{,}8 \Rightarrow x = 0{,}73$

bulunur.